CAPLP externe

de Mathématiques - Sciences Physiques

session 2007

Enoncé

http ://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [caplpexterne2007e] v1.00

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou si elle est fausse puis :

- si elle est vraie, la démontrer ;
- si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Toute suite réelle convergente est monotone à partir d'un certain rang.
2. Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère $M(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ et on note Γ la courbe décrite par le point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

   Ainsi Γ est la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, t variant dans $\mathbb{R}$.

   L'affirmation est la suivante : si les fonctions f et g sont paires, la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $y'Oy$.
3. La fonction $h : x \longmapsto x\sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Pour une fonction f continue sur l'intervalle $[0\,;1]$, si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Exercice 2

1. **Étude de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.**

   a) Déterminer l'ensemble D de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ est défini.

   b) On pose désormais $f(0) = 0$. La fonction f est-elle alors continue à droite en 0 ?

   c) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

   d) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $D \cup \{0\}$. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$, où e est le nombre réel positif tel que $\ln(e) = 1$.

2. **Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction étudiée à la question 1.**

   a) Montrer, par récurrence sur n, que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } v_n \geqslant e.$$

   b) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

   c) Montrer que :

   $$\forall x \geqslant e \text{ , } 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

   d) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

e) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

f) Déterminer un entier naturel n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée du nombre réel e à au moins 10^{-12} près.

3. **Solutions d'une équation différentielle.**

Soit K l'intervalle $]1\ ;+\infty[$.

On note E_1 l'équation différentielle suivante : $-x^2z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de E_1 sur l'intervalle K et qui ne s'annulent pas sur K.

a) On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on notera E_2.

b) Résoudre l'équation différentielle E_2 sur l'intervalle K.

On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \longmapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$ où a est un nombre réel strictement positif.

Vérifier que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 1, g_a ne s'annule pas sur K.

On a donc ainsi, pour tout x appartenant à l'intervalle K, $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

c) Pour tout nombre réel a strictement positif, on note C_a la courbe représentative de la fonction $f_a : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.

Montrer que la courbe C_a est l'image de la courbe C_1 par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Exercice 3

1. **Calcul des puissances successives d'une matrice.**

On note $\mathcal{B}_c = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\vec{e_1} = (1,0,0)\,,\ \vec{e_2} = (0,1,0)\,,\ \vec{e_3} = (0,0,1)\,.$$

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est A.

a) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u_1} = (1,-2,1)\,,\ \vec{u_2} = (1,4,1)\,,\ \vec{u_3} = (1,0,-1)\,.$

Vérifier que la famille $\mathcal{B}_n = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Q est ainsi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}_n$.

b) Calculer Q^2 et Q^3 et vérifier que Q^3 est combinaison linéaire de I_3 et de Q^2.

c) En déduire que la matrice Q est inversible, puis déterminer son inverse Q^{-1}.

d) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme f. En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_n$.

e) Rappeler le lien entre les matrices A', A et Q.

f) En déduire, pour tout nombre entier naturel n non nul, l'expression de la matrice A^n en fonction de A', Q et n.

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$A^n = \frac{2^n}{6}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \\ 2^{n+2}-4(-1)^n & 2^{n+2}+2(-1)^n & 2^{n+2}-4(-1)^n \\ 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

2. Étude de la loi d'une variable aléatoire.

Dans un jeu, un pion se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle, notés S_1,S_2,S_3, selon la règle suivante :

- À l'instant 0, le pion se situe au sommet S_1.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_1, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_2.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_2, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_1 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, au sommet S_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet S_3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_3, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_2.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le pion se trouve à l'instant n sur le sommet S_i, et on note a_n, b_n, c_n les probabilités :

$$a_n = P(\{X_n = 1\}), b_n = P(\{X_n = 2\}), c_n = P(\{X_n = 3\}).$$

a) On note T_n la matrice à une colonne : $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Préciser les matrices T_0 et T_1.

b) Écrire la matrice M, carrée d'ordre 3, dont le terme situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{\{X_n=j\}}(\{X_{n+1} = i\})$, notée aussi $P(\{X_{n+1} = i\} / \{X_n = j\})$.

c) Justifier que les conditions d'application de la formule des probabilités totales sont réunies, puis l'utiliser pour montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$T_{n+1} = MT_n.$$

d) En déduire l'expression de la matrice T_n en fonction de n, T_0 et A, où A est la matrice étudiée à la question 1.

e) En déduire les probabilités a_n, b_n, c_n en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.

f) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'espérance de X_n est indépendante de n.

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien réel $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soient les points A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) et C(0, 0, 1). Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$, on note indifféremment $\varphi(M)$ ou $\varphi(x, y, z)$ la quantité :

$$\varphi(M) = \varphi(x, y, z) = OM + AM + BM + CM$$

On admettra ici que la quantité $\varphi(M)$ admet un minimum global, noté m, lorsque le point M décrit l'espace $\mathcal{E}$ et on souhaite obtenir la valeur de ce minimum ainsi que le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce minimum est réalisé.

1. Calculer et comparer les quantités $\varphi(O), \varphi(A), \varphi(B)$ et $\varphi(C)$.
2. Justifier que $0 \leqslant m \leqslant 3$ et que si φ réalise son minimum m en un point P alors $OP \leqslant 3$.
3. Soit r l'application affine de l'espace $\mathcal{E}$ transformant le point $M(x, y, z)$ en le point $M' = r(M)$ de coordonnées (y, z, x).
   a) Déterminer les images par l'application r des points O, A, B et C.
   b) Vérifier que l'application r est une isométrie, c'est-à-dire que, pour tout couple de points (M, N) de $\mathcal{E}^2$, les distances $r(M)r(N)$ et MN sont égales, c'est-à-dire $M'N' = MN$.
   c) Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, montrer que $\varphi(M) = \varphi(M')$.
4. Soit Δ la droite passant par le point O et de vecteur directeur $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   Soit P un point qui n'est pas sur la droite Δ.
   Soient $P' = r(P)$ et $P'' = r(P')$ et soit Q l'isobarycentre des points P, P' et P''.
   a) Montrer que pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, on a : $MQ \leqslant \frac{1}{3}(MP + MP' + MP'')$.
   b) En déduire que $\varphi(Q) - OQ \leqslant \varphi(P) - OP$.
   c) Vérifier que $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$ puis en déduire que $\varphi(Q) < \varphi(P)$.
   d) Si l'application φ réalise son minimum m en un point P, que sait-on désormais sur ce point P ?
5. On considère la fonction Φ définie en tout nombre réel x par $\Phi(x) = \varphi(x, x, x)$.
   a) Montrer que, pour tout nombre réel x négatif ou nul, $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$.
   b) Étudier le sens de variation de la fonction Φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   c) En déduire l'existence d'un point P_0 en lequel l'application φ atteint son minimum. Déterminer le point P_0 et le minimum de l'application φ.
6. Vérifier que P_0 est le barycentre du système de points pondérés $\{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.
   On note θ une mesure de l'angle non orienté $\widehat{AP_0B}$, choisie dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.
   Déterminer la valeur exacte de $\cos(\theta)$ et une valeur approchée à un degré près par défaut de θ.

Remarque : On pourrait vérifier (mais ceci est admis ici) qu'en fait les mesures des angles $\widehat{OP_0A}$, $\widehat{OP_0B}$, $\widehat{OP_0C}$, $\widehat{AP_0B}$, $\widehat{BP_0C}$ et $\widehat{CP_0A}$ choisies dans l'intervalle $[0 ; \pi]$ sont toutes égales à θ.